



**Шумська С.С.**, канд. екон. наук  
Інститут економіки та прогнозування НАН України

## **ВИРОБНИЧА ФУНКЦІЯ В ЕКОНОМІЧНОМУ АНАЛІЗІ: ТЕОРІЯ ТА ПРАКТИКА ВИКОРИСТАННЯ**

*Представлено основні теоретичні положення й види виробничих функцій. Розглянуто напрями досліджень, що базуються на використанні виробничих функцій. Зроблено огляд їх модифікацій.*

Характерною особливістю практики проведення економічного аналізу стало впродовж останніх десятиліть активне застосування методів статистики та математичного моделювання. Сьогодні розробка спеціальних моделей під конкретні завдання гармонійно узгоджується з численними спробами побудови великих економетричних систем, до складу яких серед ключових елементів включається виробнича функція (ВФ). Широке використання апарату виробничих функцій на рівні мікроекономіки пов'язане із можливостями аналізу та планування роботи підприємства чи фірми; в макроекономічних дослідженнях ВФ – це не тільки один із способів прогнозування розвитку економіки, а й прикладний інструмент, який використовується для оцінки та порівняння ефективності економік.

Для України, де одним із актуальних питань сьогодення є виявлення резервів зростання національної економіки, використання ВФ може дати поштовх до удосконалення існуючих механізмів управління та активізації внутрішніх факторів розвитку. Аналіз основних теоретичних положень та огляд світового досвіду, що є метою даної статті, можна розглядати як один із кроків до активного застосування ВФ на практиці, оскільки вказує можливі напрями досліджень української економіки.

Серед імен учених, роботи яких внесли значимий вклад у розробку теорії виробничих функцій слід назвати Уолтерса, Брауна, Фелдстайна, Ерроу, Клейна, Бриджа, Клемгута, Аллена, Фішера, Хільдебранда, Ліу, Сато, Гріна. Різні напрями їх досліджень збагатили світову практику використання ВФ. Серед визначень виробничої функції виділимо декілька. Наприклад, у Р.Вінна та К.Холдена, які зробили спробу узагальнити основні підходи прикладної економетрики, виробнича функція представляє собою *математичну функцію, що кількісним характеристикам використання факторів виробництва в межах деякої господарської одиниці ставить у відповідність кількісні характеристики випуску продукції*; причому сама господарська одиниця може бути визначеною по-різному: як діяльність учасника економічного процесу, як окрема фірма, галузь чи вся національна економіка у цілому [1].

На сучасному етапі економічного аналізу виробничу функцію, зокрема, у Великій радянській енциклопедії та Російському енциклопедичному словнику представлено як *економіко-математичне співвідношення, що в аналітичній формі задає зв'язок між економічними характеристиками випуску з одного боку і ресурсами (факторами), що використовуються або їх загальними обсягами – з іншого*. Автори вітчизняного Фінансового словника дають таке визначення: ВФ – *формалізована залежність кількості виготовленої продукції від витрат факторів виробництва* [2].

У загальному вигляді виробнича функція може бути представлена рівнянням [3]:

$$F(x, y, A) = 0, \quad (1)$$

де  $y$  – вектор випусків продукції,  $x$  – вектор витрат ресурсів,  $A$  – матриця параметрів. В економічних дослідженнях ВФ використовується, як правило, у вигляді одного рівняння, де компоненти випуску об'єднані в одну скалярну величину ( $y$ ), а кількість різних виробничих ресурсів (фактори  $x_i$ ) зведені до мінімуму, що дозволяє розрахувати параметри функції:

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (2)$$

Цінним інструментом вивчення виробничих функцій є їх геометрична інтерпретація. Скористаємось поясненням геометричної інтерпретації ВФ, що наведено авторами словника-довідника "Математика й кібернетика в економіці". Так, "... у випадку однієї незалежної та однієї залежної змінних ( $P = f(x)$ ) неперервну ВФ можна зобразити кривою на площині з координатами  $P$  та  $x$  (рис. 1). У випадку двох незалежних змінних ВФ – це поверхня у тривимірному просторі (рис. 2). За умови більшої кількості змінних ВФ представляє гіперповерхню (виробничий пагорб) в абстрактному багатовимірному просторі.

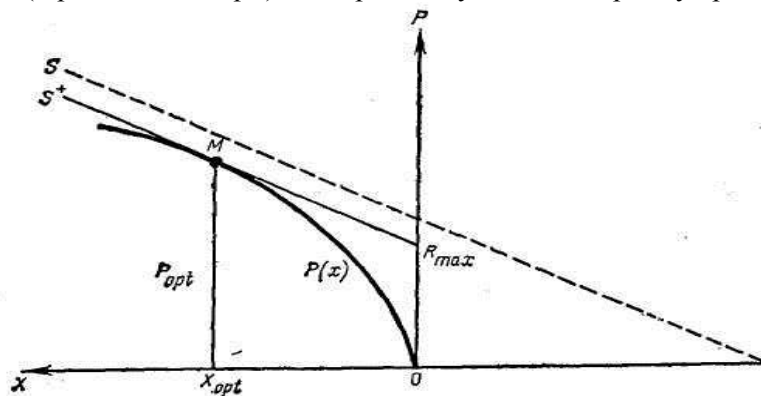


Рис. 1. Геометрична інтерпретація ВФ на площині

Джерело: Математика и кибернетика в экономике. Словарь-справочник. – 2-е изд., перераб. и доп. – М: Экономика, 1975. – С. 453–458.

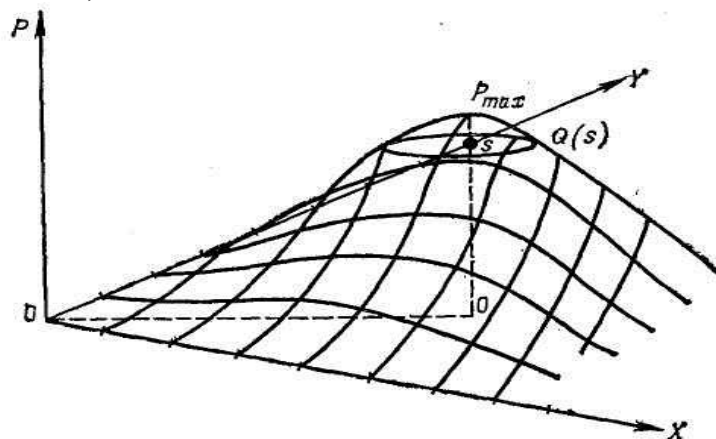


Рис. 2. Виробнича функція у тривимірному просторі

Джерело: Математика и кибернетика в экономике. Словарь-справочник. – 2-е изд., перераб. и доп. – М: Экономика, 1975. – С. 453–458.



Особливу увагу представляють екстремальні точки ВФ. Якщо на рис. 1 постійне (лінійне) співвідношення цін на продукцію й витрат зобразити прямою  $S$ , то точка дотику  $M$  кривої  $P(x)$  та прямої  $S$  буде точкою оптимуму при критерії максимізації прибутку (це наглядно видно із графіка, де відрізок  $OR$  відповідає максимуму прибутку). Точці дотику  $M$  відповідає оптимальне значення випуску  $P_{opt}$  та оптимальне значення витрат ресурсу  $x_{opt}$ . Аналогічно екстремальні точки ВФ можуть бути представлені як точки дотику множини гіперплощин з поверхнею виробничої функції у випадку багатьох змінних. Геометричне місце точок на гіперповерхні ВФ, що відповідають фіксованому рівню випуску продукції при різних варіантах поєднання витрат називається *ізоквантою*. Теоретично будь-яка точка на ізокванті відповідає заданому рівню продукції, однак по технічним причинам може бути реалізованою лише частина всієї множини варіантів. Знаходження серед підмножини технологічно допустимих варіантів точки (або точок) з найвищою економічною ефективністю є задачею оптимального програмування" [див. 3].

Залежно від характеру виробничого процесу, цілей та засобів моделювання ВФ можуть використовуватись невід'ємні функції різного виду, деякі з них представлені на прикладі двофакторної функції у табл. 1.

Таблиця 1

## Види та практика використання виробничих функцій

Назва ВФ	Двофакторна ВФ	Використання
1. Функція з фіксованими пропорціями факторів (ВФ Леонтьєва)	$Y = \min(x_1 / a_1, x_2 / a_2)$	Призначена для моделювання строго детермінованих технологій, що не допускає відхилення від технологічних норм використання ресурсів на одиницю продукції. Зазвичай використовуються для описування дрібномасштабних або повністю автоматизованих виробничих об'єктів
2. ВФ Кобба–Дугласа	$Y = a_0 x_1^{a_1} x_2^{a_2}$	Використовується для опису середньомасштабних об'єктів (від промислового об'єднання до галузі), що характеризуються стійким, стабільним функціонуванням
3. Лінійна ВФ	$Y = a_1 x_1 + a_2 x_2$	Застосовується для моделювання великомасштабних систем (велика галузь, економіка у цілому), у яких випуск продукції є результатом одночасного функціонування великої кількості різних технологій
4. ВФ Аллена	$Y = a_0 x_1 x_2 - a_1 x_1^2 - a_2 x_2^2$	Призначена для опису виробничих процесів, у яких значне зростання кожного з факторів негативно впливає на обсяг випуску. Зазвичай використовується для опису дрібномасштабних ВС із обмеженими можливостями переробки ресурсів
5. ВФ з постійною еластичністю заміни факторів ПЕЗ (CES- constant elasticity of substitution)	$Y = (a_1 x_1^{a_2} + a_3 x_2^{a_4})^{a_5}$	Застосовується у випадках, коли відсутня точна інформація про рівень взаємозамінності виробничих факторів і є підстави припускати, що цей рівень істотно не змінюється при зміні обсягів ресурсів. Може бути використана (при наявності засобів оцінювання параметрів) для моделювання систем будь-якого рівня



**Виробнича функція в економічному аналізі...**

Назва ВФ	Двофакторна ВФ	Використання
6. ВФ із лінійною еластичністю заміни факторів (LES)	$Y = x_1^{a_0}(a_1x_1 + a_2x_2)^{a_1}$	Рекомендується для опису виробничих процесів, у яких можливість заміщення факторів, що залучаються, істотно залежить від їх пропорцій
7. Функція Солоу	$Y = (a_1x_1^{a_3} + a_2x_2^{a_4})^{a_5}$	Може використовуватися в тих же ситуаціях, що й ВФ ПЕЗ, однак припущення, що лежать у її основі, є більш слабшими за передумови ПЕЗ. Рекомендується в тих випадках, коли припущення про однорідність є невинуватим. Може моделювати системи будь-якого масштабу
8. Обмежена функція ПЕЗ	$Y = \min(x_1/a_1, x_2/a_2, (a_3x_1^{a_5} + a_4x_2^{a_5})^{a_6})$	Призначена для опису дворежимного виробничого процесу, у якому один з режимів характеризується відсутністю замінюваності факторів, інший – ненульовою постійною (але невідомою заздалегідь) величиною еластичності заміни
9. Багаторежимна функція	$Y = (a_1x_1^{a_0} + a_2x_2^{a_0})^{a_1} \dots (a_kx_1^{a_0} + a_kx_2^{a_0})^{a_k}$	Використовується при опису процесів, у яких рівень віддачі кожної нової одиниці ресурсу стрибкоподібно змінюється залежно від співвідношення факторів. Додатково застосовувати при наявності апріорної інформації про число режимів, а іноді й про ширину "перехідної" області між режимами
10. ВФ ЛП	$Y = \min(x_1/a_{11}, x_2/a_{12}) + \dots + \min(x_1/a_{k1}, x_2/a_{k2})$	Має сенс використовувати в тих випадках, коли випуск продукції є результатом одночасного функціонування $k$ фіксованих технологій, що використовують ті самі ресурси

Джерело: Производственные функции в управлении проектами [Электронный ресурс] // [www.ii.spb.ru](http://www.ii.spb.ru).

Наукове підґрунтя аналізу виробничої функції було закладене ще К.Марксом при дослідженні різних варіантів співвідношення змінного та постійного капіталів у сфері виробництва. Органічну будову (вартісну) капіталу (співвідношення  $c$  і  $v$ ) К.Маркс розглядав як відображення його технічного складу. В.Ленін поглибив аналіз шляхом урахування фактора технічного прогресу і дослідив динаміку органічної будови капіталу. Однак через відсутність на той час статистичних даних числові приклади К.Маркса та В.Леніна попри величезну теоретичну значущість мали лише ілюстративне призначення [див. 3].

Сьогодні макроекономічна ВФ має широке поле застосування<sup>1</sup>, оскільки її динамічний аналіз дозволяє вирішити дуже важливі завдання:

– вивчення динаміки ефективності виробничих факторів (продуктивності праці, фондівіддачі),

<sup>1</sup> Дозволяє для кожного проміжку часу розрахувати середні та граничні ефективності норми заміни та еластичності факторів

- визначення екстенсивних та інтенсивних факторів економічного зростання,
- визначення вкладу кожного виробничого фактора в загальний приріст виробництва.

У теоретичному та прикладному макроекономічному аналізі найширше застосування мають чотири види ВФ: лінійна, функція Кобба–Дугласа, функція CES (з постійною еластичністю заміни), функція Леонтьєва. Їх перевагами є невелика кількість параметрів, що полегшує статистичну оцінку, а також показники економічного зростання (ефективності, інтенсифікації), що розраховані на їх основі, мають зручну аналітичну форму.

Серед найвідоміших – функція Кобба–Дугласа, яку у загальному вигляді<sup>2</sup> можна записати як:

$$Y_t = f(K_t, L_t) = AK_t^\alpha L_t^\beta, \quad (3)$$

де  $A$  – коефіцієнт, що характеризує ефективність виробництва,  $\alpha$  і  $\beta$  – коефіцієнти еластичності виробництва, відповідно, по капіталу  $K$  і праці  $L$ , що згідно з неокласичною теорією відображають роль кожного фактора виробництва у прирості кінцевого продукту (чи частку доходу відповідного фактора в одиниці сукупного доходу).

Вперше емпіричний зв'язок між випуском продукції та факторами було представлено у 1927 р. Чарльзом Коббом та Полем Дугласом через динаміку індексних показників росту промисловості США:  $P = 1,01K^{0,25}L^{0,75}$ , де  $P$  – випуск виробничої продукції,  $K, L$  – обсяги затрачених капіталу та праці. Слід відмітити, що у різних джерелах параметри першої оціненої функції  $\alpha$  і  $\beta$  представлені різними величинами (найчастіше 0,25 і 0,75 чи 0,27 і 0,73). Це пов'язано з тим, що параметризація функції робилась на різних часових проміжках.

У табл. 2 наведено приклади значень параметрів виробничої функції Кобба–Дугласа для економіки США, оцінені за різні проміжки часу. Оскільки розрахунки проводились за різними методиками та на різних часових періодах, то й результати демонструють різноманітність. Однак слід відмітити й спільні риси: параметр  $\beta$  перевищує  $\alpha$  та їх сума коливається в межах одиниці.

Таблиця 2

Параметри виробничої функції Коба–Дугласа для економіки США

Період	Параметри			Автори
	$\alpha$	$\beta$	$\alpha + \beta$	
1899–1922	0,25	0,75	1,00	Дуглас
1904	0,31	0,65	0,96	Дуглас
1919	0,25	0,76	1,01	Дуглас
1969–1948	0,70	0,25	0,95	Валавание
1900–1953	0,16	0,84	1,00	Клейн
1921–1941	0,34	2,13	2,47	Тинтер
1934–1959	0,41	0,91	1,32	Михалевський

Джерело: Терехов Л.Л. Производственные функции. – М.: Статистика, 1974.

У практиці використання ВФ перевірка суми коефіцієнтів  $\alpha$  і  $\beta$  на рівність одиниці має велике значення, бо визначає тип економічного зростання:

<sup>2</sup> Ця функція була запропонована Філіпом Уікстедом (Wicksteed) на 30 років раніше, ніж була використана для емпіричних розрахунків Ч.Коббом та П.Дугласом у їх класичній роботі [4].

1)  $\alpha + \beta > 1$  (ВФ із зростаючою віддачею від масштабу) відповідає інтенсивному економічному зростанню, причому у випадку  $\alpha > \beta$  має місце працеінтенсивне економічне зростання; при  $\alpha < \beta$  фондоінтенсивне економічне зростання;

2)  $\alpha + \beta < 1$  (ВФ із спадною віддачею від масштабу) означає, що випуск продукції зростає повільніше, ніж зростання факторів  $K$  і  $L$ , тобто економічне зростання відсутнє (або поза розглядом залишились інші важливі фактори);

3)  $\alpha + \beta = 1$  має місце екстенсивний тип економічного зростання (ВФ із постійною віддачею від масштабу).

Серед важливих факторів, що не враховані у виробничій функції типу (3), варто відзначити науково-технічний прогрес. Вплив НТП проявляється у зростанні або сукупної ефективності ресурсів, або ефективності окремого ресурсу. У зв'язку з цим розрізняють [5] три види ВФ:

1) ВФ, у якій НТП враховується як функція від часу, що безпосередньо не пов'язується ні з працею, ні з капіталом (**нейтральний НТП або НТП по Хіксу**):

$$Y = A(t)f(K, L), \quad (4)$$

де  $A(t) = Ae^{jt}$  – функція, що відображає вплив на ефективність різних факторів, які для узагальнення об'єднані поняттям НТП.

2) ВФ із працевберігаючим НТП (**НТП по Солоу**). Згідно із моделлю Солоу, ефективність використання трудових ресурсів із часом зростає, а ефективність використання капіталу залишається незмінною<sup>3</sup>:

$$Y = f(K, A(t)L). \quad (5)$$

3) Капіталозберігаючий НТП (продуктивність капіталу зростає при незмінності його фізичного обсягу) є більш рідким випадком (**НТП по Хароду**):

$$Y = f(A(t)K, L). \quad (6)$$

Вперше спроба включення НТП у виробничу функцію була зроблена Я.Тінбергеном у 1937 р. в роботі "Економетричний підхід до проблем ділового циклу". У розрахунках для радянської економіки Вейцманом для обробних галузей за період 1950–1968 рр. середньорічний темп НТП було оцінено у 2,5%. Автор дійшов висновку, що уповільнення темпів зростання радянської економіки пов'язано із невисокою еластичністю заміщення факторів і вичерпуванням можливостей залучення додаткової робочої сили [6]. Переглядаючи результати Вейцмана, Десаї (також на основі функції CES і за припущення про нейтральність технічного прогресу по Хіксу) оцінював темп НТП надійно зростаючим від 3,5 до 4% щорічно [7].

Використання апарату ВФ дозволяє на практиці оцінювати вклад кожного фактора в економічне зростання. Це стає можливим, тому що під час оцінювання ВФ часові ряди макроекономічних змінних  $Y_t$ ,  $K_t$ ,  $L_t$  вважаються відомими, а оцінюються значення коефіцієнтів  $\alpha$  і  $\beta$ . Логарифмування моделі (4) приводить функцію до лінійного виду:  $\ln Y = \ln A + jt + \alpha \ln K + \beta \ln L$ . Після диференціювання обох частин рівняння (при  $dt = 1$ ) можна отримати рівняння у прирістній формі з виділенням вкладу кожного фактора:

<sup>3</sup> До цього типу НТП відноситься впровадження у виробництво електроприладів, автоматичних ліній, комп'ютерів.

$$\frac{dY}{Y} = j + \alpha \frac{dK}{K} + \beta \frac{dL}{L}. \quad (7)$$

При використанні нелінійних методів оцінюється модель:

$$\frac{Y}{L} = A e^{\beta \left( \frac{K}{L} \right)}, \quad (8)$$

де  $Y/L$  – продуктивність праці, а  $K/L$  – фондоозброєність.

Використовуючи даний підхід, російські вчені [див. 5] зробили оцінку вкладу екстенсивних та інтенсивних факторів у зростання ВВП провідних країн світу за останні 40 років XX ст. – з 1960 по 2001 рр. (табл. 3). Оцінка та інтерпретація вкладу факторів проводилась по рівнянню (7), де темп приросту випуску розкладено на три складові:  $j$  – вклад НТП,  $\alpha \frac{dK}{K}$  – вклад від при-

росту капіталу,  $\beta \frac{dL}{L}$  – вклад від зростання кількості зайнятих. За умови  $\alpha + \beta = 1$   $j$  представляє вклад у темпи економічного зростання інтенсивних факторів, а  $\alpha \frac{dK}{K} + \beta \frac{dL}{L}$  – вклад екстенсивних факторів. За  $Y$  було взято ВВП в постійних цінах 1995 р.,  $K$  – валові інвестиції,  $L$  – кількість зайнятих.

Результати дослідження Ю.Лукашина та Л.Рахліної показують, що впродовж останніх 40 років XX ст. інтенсивні фактори відігравали більшу роль у процесі зростання, ніж екстенсивні. Найбільш високим вклад НТП був у європейських країнах – приблизно двох третин, а в Японії та США близько половини. Вклад інвестицій коливається в середньому близько 1/3, тільки в Японії він дещо перевищив 1/2. Кількість зайнятих не має значного впливу на темпи приросту ВВП, за виключенням США (17,87% на проміжку 1961–2001 рр. та 34,67% на проміжку 1981–2001 рр.), останнє пояснюється експертами притоком кваліфікованих іммігрантів. Отже, в провідних країнах світу темпи розвитку економіки більш ніж на 50% забезпечуються новими технологіями [див. 5].

Таблиця 3

Результати оцінювання виробничих функцій за 1961–2001 рр., %

Країна	Середньорічний темп приросту ВВП	Інтенсивних факторів	Вклад Екстенсивних факторів			Приріст ВВП за рахунок інтенсивних факторів
			Всього	Інвестицій	Зайнятих	
США	3,42	44,83	55,17	37,30	17,87	1,53
Японія	4,82	44,61	55,39	55,39	0	2,15
Німеччина	2,77	71,52	28,48	22,97	5,51	1,98
Велика Британія	2,44	66,01	33,99	33,99	0	1,1
Франція	3,23	57,70	42,30	30,30	12,00	1,87

Джерело: Лукашин Ю., Рахлина Л. Производственные функции в анализе мировой экономики // МЭиМО. – 2004. – № 1. – С. 17–27.

Особливу важливість сучасних інформаційних технологій (ІТ) для економічного зростання показано у роботі американських економістів Д.Олінера та Е.Сішеля [8], що зробили оцінку параметрів ВФ, в якій показники ІТ були включені як самостійні фактори виробництва. Автори побудували модель, де

оцінювався вплив на економічне зростання таких факторів: капіталу, вкладеного в програмне забезпечення; капіталу, вкладеного у засоби зв'язку; іншого капіталу й витрат праці (табл. 4). Індекс якості робочої сили було включено як витрати праці. Якість враховувалась за допомогою показників змін у рівнях освіти, кваліфікації та структури (по рівню освіти та статі) зайнятих [див. 5].

Таблиця 4

**Фактори реального зростання виробництва в приватному  
несільськогосподарському секторі США, %**

	1974–1990 рр.	1991–1995 рр.	1996–1999 рр.
Середньорічний темп приросту випуску	3,06	2,75	4,82
Внесок показників*			
ІТ	0,49	0,57	1,10
Інший капітал	0,86	0,44	0,75
Відпрацьовані людино/години	1,16	0,82	1,5
Якість робочої сили	0,22	0,44	0,31
MFP	0,33	0,48	1,16

\* Розраховано як середньорічні значення різниці логарифмів, помножені на 100.

Джерело: Лукашин Ю., Рахлина Л. Производственные функции в анализе мировой экономики // МЭиМО. – 2004. – № 1. – С. 17–27; Oliner D., Sichel D. The Resurgence of growth in the Late 1990s: Is Information technology the Story? // The Journal of Economic Perspectives. – 2000. – V. 14. – P. 3–22.

Розділивши часовий період аналізу на три проміжки та побудувавши для них ВФ, автори довели, що у другій половині 90-х рр., основною причиною високих темпів зростання реального ВВП (середньорічні темпи становили більше 4%) було істотне прискорення НТП у приватному секторі економіки США. Після двох відносно спокійних часових періодів (1974–1990 та 1991–1995 рр.), де капіталовкладення в ІТ становили невелику частку валових інвестицій в економіку, у 1995–1999 рр. інвестиції в комп'ютери та засоби зв'язку зросли в реальних цінах більш ніж у чотири рази, значно зросла ефективність комп'ютерної техніки та масштаби її використання. Це, на думку, авторів, забезпечило близько двох третин зростання продуктивності праці і дало підстави вважати ІТ важливим фактором росту.

Привертає увагу інший цікавий результат розрахунків Д.Олінера та Е.Сішеля – зростання із 0,33 до 1,16 значення багатфакторної продуктивності MFP (*multifactor productivity*), що відображає оцінку інших джерел економічного зростання не врахованих у вище представлених факторах. Це свідчить про необхідність пошуку та кількісної оцінки інших чинників зростання.

У контексті аналізу різних значущих факторів розвитку, слід відмітити важливу **особливість апарату виробничих функцій**, використання яких **дає можливість проводити міжкрайнові порівняння**. Так, наприклад, американські економісти Манків, Ромер та Вейл побудували для 1985 р. статичну просторову модель на інформації по 98 країнах [9]. Вони оцінювали дві ВФ – модель Солоу з екзогенним НТП і  $\alpha + \beta = 1$  та розширену модель, для більш точних оцінок до якої було введено показник "інтелектуального капіталу" ( $H$ ):

$$Y_t = K_t^\alpha H_t^\beta (A(t)L_t)^{1-\alpha-\beta}, \quad (9)$$

де  $H_t$  – інтелектуальний капітал,  $A(t)$  – фактор НТП,  $\alpha + \beta < 1$ .



У показник "інтелектуального капіталу" автори вважали за необхідне включити дані про витрати на освіту, будівництво й обладнання освітніх закладів, видання наукової літератури й т. ін.<sup>4</sup>. Аналіз статистичного оцінювання рівняння показав, що збільшення основного та інтелектуального капіталу призводить до зростання випуску у розрахунку на одного зайнятого, в той час як зростання зайнятості при інших незмінних умовах веде до його скорочення. Розрахунки по двох моделям показали, що змінна, яка відображає частку дорослих із вищою освітою є істотно значущою, її введення підвищує коефіцієнт детермінації (з 0,59 до 0,78), і крім того, введення фактора *SCHOOL* призвело до значного зменшення коефіцієнта при основному капіталі порівняно з основною моделлю [див. 5, 9].

Активне включення у ВФ змінних, які характеризують різні аспекти людського чи інтелектуального капіталу (йдеться про знання, вміння, кваліфікацію робітників), стало результатом появи у 80-ті рр. моделей із ендегенним НТП, які базуються на ідеї нагромадження людського капіталу. Слід відмітити, що схожі ідеї уже висловлювались раніше, зокрема С.Вишневим:

$$P_{kn} = aL^{\alpha} * C^{\beta} * Q^{\delta} * B^{\sigma}, \quad (10)$$

де  $P$  – суспільний продукт,  $L$  – зайнятість у сфері матеріального виробництва,  $C$  – виробничі фонди,  $Q$  – витрати на освіту та підвищення кваліфікації (якість живої праці),  $B$  – витрати на НДДКР [10].

Перші моделі ендегенного зростання базувались на тому, що технологія (знання) є суспільним благом [11]. Оскільки технічний прогрес – це результат нагромаджених знань, а знання дають монопольну владу фірміноватору і їх нагромадження супроводжується позитивними зовнішніми ефектами, то технологія покращується у всіх фірм в економіці. Якщо розглядати модель економіки, в якій є два сектори (виробництва знань і виробництва випуску), то віддача у першому секторі буде спадною, а в другому – зростаючою. Отже й зростаючою буде віддача від масштабу виробничої функції. З цього виходить, що в економіці, де накопичено більше знань (у широкому розумінні цього слова, тобто в економіці з високим рівнем технологій й високо розвиненими інститутами) віддача від інвестицій буде вищою, а процес інвестування буде здійснюватись більш швидкими темпами. Тому величина коефіцієнта при змінній  $K$  у ВФ моделі ендегенного росту буде більшою, ніж у неокласичній ВФ (де припускається постійна віддача від масштабу). Це означає, що віддача від масштабу виробничої функції може бути зростаючою і ВФ можна у загальному випадку представити як функцію Коба–Дугласа виду:

$$Y = AK^{\alpha} L^{\beta}, \quad (11)$$

причому  $\alpha_{\text{(рівняння (11))}} > \alpha_{\text{(рівняння (3))}}$ .

Крім того, як зазначає А.Чубрик, оскільки в наслідок розвитку економіки зростає кваліфікація робітників, тобто якість фактора "праця" зростає, то якщо не проводити коригування (пов'язані із поліпшенням його якості), то коефіцієнт  $\beta$  буде більше, ніж  $(1 - \alpha)$ , а отже, сума коефіцієнтів ВФ буде більше одиниці:  $\alpha + \beta > 1$  [див. 11].

<sup>4</sup> Однак, за відсутності статистики для більшості країн цей показник оцінювався умовно як середня за весь період частка дорослих людей із вищою освітою (умовне позначення *SCHOOL*).

Показовою моделлю з ендегенним НТП є модель П.Ромера, Ф.Агіїона та П.Хоувіта [12], де П.Ромер розділяє економіку на три основні сектори. В першому дослідницькому секторі "виробляються нові знання":

$$\dot{A} = \delta * H_a * A, \quad (12)$$

де  $H$  – людський капітал,  $A$  – існуючий запас знань,  $\delta$  – параметр наукової продуктивності. У другому секторі знання трансформуються у засоби виробництва (технологічне обладнання). Третій сектор за допомогою засобів виробництва, витрат праці й людського капіталу забезпечує випуск кінцевої продукції. Капітал  $K$  в моделі П.Ромера представляється як сума його складових  $x$ , витрачених на придбання необхідних засобів виробництва:

$$Y(H_y, L, x) = H_y^\alpha L^\beta \sum_{i=1}^{\infty} x_i^{1-\alpha-\beta}, \quad (13)$$

де  $x$  – список засобів виробництва, що використовуються однією фірмою для випуску кінцевої продукції;  $\alpha, \beta$  – технологічні параметри [див. 10].

У загальному випадку сучасна ВФ, що включає фактор людського капіталу, може бути представленою у вигляді:

$$F = (K, L, k, h), \quad (14)$$

де  $K, L$  – сукупні витрати праці й капіталу;  $k$  – сукупний інтелектуальний капітал;  $h$  – витрати інтелектуальної праці [див. 12].

Слід зазначити, що введення у ВФ нових (окрім традиційних  $K$  і  $L$ ) змінних характерне як для ендегенних, так і неокласичних моделей. Серед причин розширення традиційного набору факторів ВФ: *по-перше*, пошук чинників, що пояснюють різницю в темпах зростання і рівнях доходу між різними країнами; *по-друге*, необхідність врахування специфіки країн перехідної економіки, зокрема, низьку якість економічної статистики (розриви, відсутність наступності із попереднім періодом планового розвитку), проблеми пов'язані з трансформаційними ефектами та потребою врахування структурних зрушень.

Так, заслуговують на увагу роботи Кушнірського Ф.І., який для того, щоб пристосувати неокласичну ВФ до специфіки перехідного періоду Росії, доповнив модель, використовуючи як фактори виробництва, окрім  $K$  і  $L$  (капіталу й праці), самостійно побудований індекс інституційного розвитку (*institutional index of transition*). Оригінальний індекс конструюється із застосуванням даних ЄБРР (індикатори, що відображають динаміку перехідних процесів у виробничому секторі, фінансовому секторі і торгівлі). Таким чином будується ВФ типу  $Y = f(K, L, I; t)$ , де  $I$  – індекс інституційного розвитку по панельним даним для 10 країн колишнього СРСР за 1994–1997 рр.

Серед вдалих прикладів також варто назвати модифікації виробничих функцій побудованих М.Вейцманом, який вніс великий вклад у дослідження економіки СРСР з використанням апарату виробничих функцій. Цікавими є модифікації моделі, що зробив Десаї, який додав у пояснювальні змінні  $R$  – сировину, і модифікована ВФ набрала вигляду  $Y = f(K, L, R; t)$ . У тому ж ключі витримана робота, що розглядає, окрім традиційних факторів значення іноземних інвестицій та кредитів для Радянського Союзу.

Підвищення зацікавленості у дослідженнях ролі фіскальних факторів державного регулювання знайшло відображення у широкому розвитку **виробничо-інституціональних функцій**. Їх відмінність від традиційних ВФ по-

лягає в тому, що у звичайних ВФ як ендогенний показник використовується обсяг випуску (як правило, обсяг ВВП), а як фактори – праця (чисельність зайнятих) і капітал (обсяг основних фондів), у той час як у виробничо-інституціональних функціях до основних макрофакторів додаються змінні, що характеризують інституційне середовище [13]. Так, Е.Балацький використовує одну інституційну змінну – середній податковий тягар (частка державних податків до обсягу ВВП), припускаючи, що при рівних технологічних умовах (обсягах праці та капіталу) різний рівень податкового навантаження буде продукувати різний обсяг ВВП, оскільки податки, беручи участь у формуванні системи стимулів економічних агентів, впливають на рівень ділової і виробничої активності. Російський вчений запропонував функцію, що має вигляд:

$$Y = \gamma DK^{(a+bq)q} L^{(n+mq)q}, \quad (15)$$

де  $Y$  – випуск (обсяг ВВП країни),  $K$  – капітал (обсяг основних фондів),  $L$  – праця (чисельність зайнятих в економіці),  $q$  – податковий тягар (частка податкових надходжень  $T$  у ВВП,  $q = T/Y$ ),  $D$  – трендовий оператор (функція, що залежить від часу  $t$ , представляє узагальнення нейтрального НТП по Я.Тинбергену);  $\gamma, a, b, n, m$  – параметри, які статистично оцінюються на основі ретроспективних динамічних рядів.

Апробація функції пройшла успішно на статистичних даних чотирьох країн, що представляли різні типи економічних систем: Росії, Швеції, Великобританії та США, тим самим довівши універсальність моделі.

Побудова виробничо-інституціональних функцій та розрахунки на основі даних України також дають позитивні результати, зокрема, для аналізу фіскальних інструментів та Лафертових ефектів у вітчизняній економіці, про що свідчать зокрема, дослідження Т.Меркулової, В.Михайленко, Н.Москалькової, А.Телейко [14].

Прикладом використання ВФ для проведення прогнозних розрахунків ВВП України можна назвати модель Б.Дунаєва [15]. Виробнича функція у моделі є функцією реального ВВП залежно від кількості працюючих в економіці та завантаженого капіталу у сфері виробництва (за відомих: кількості населення країни, коефіцієнта працюючих у сфері виробництва та структури витрат виробництва). У моделі також розглядаються функції: рівноважної реальної заробітної плати, пропозиції праці, попиту на працю та потенційного ВВП.

Свого роду унікальним у рамках побудови моделей ендогенного зростання є на сьогоднішній день дослідження проведені в Інституті економіки прогнозування НАН України під керівництвом В.Гейця. Фахівцями відділу моделювання економічного розвитку з метою оцінки впливу різних факторів для розширеної ВФ, яка описує економіку України, було сконструйовано низку інтегральних показників та індексів. Серед них: **виробничої діяльності** (М.Скрипниченко, В.Дем'яненко), **структурних зрушень** (Т.Приходько, М.Скрипниченко), **технологічного розвитку** (Т.Приходько, М.Скрипниченко), **людського капіталу** (В.Близнюк), **зовнішніх факторів** (В.Сіденко, К.Бобер), **фінансових ресурсів** (С.Шумська), **добробуту** (М.Соколик) [16]. Такий підхід дав змогу розширити аналітичні та прогностичні можливості розроблених моделей, оскільки нові запропоновані змінні у ВФ несуть не тільки кількісну характеристику досліджуваних процесів, але головне – міс-

тять різні якісні характеристики (чого не можливо одночасно досягнути традиційними засобами).

Слід зазначити, що в емпіричних дослідженнях, які проводяться з використанням апарату виробничих функцій, на сьогоднішній день розглядається широке коло факторів зростання. У цьому контексті цікавою є робота Сала-і-Мартін [17], де розглянуто 62 змінних, які найбільш часто зустрічаються в емпіричних роботах (аналізувався період робіт 1960–1990 рр.). Серед них можна виділити такі групи факторів:

- географічні;
- політичні;
- релігійність;
- викривлення ринкового механізму;
- інвестиції у виробничі та невиробничі активи;
- виробництво у первинному секторі;
- відкритість;
- тип економічної організації.

В останнє десятиліття особливу увагу у роботах, присвячених аналізу економічної динаміки в країнах перехідної економіки, було приділено оцінкам макроекономічної політики й прогресу в економічних, політичних та інституційних реформах. Серед них варто назвати, наприклад, роботи О.Гаврилишина [18, 19]. Доречним буде навести деякі висновки, отримані в цих роботах:

- ключовими факторами економічного зростання в країнах із перехідною економікою є макроекономічна стабілізація, структурні реформи й скорочення державних витрат;

- розвиток ринкових інститутів є істотним, але не основним фактором економічного зростання;

- стартові умови мають вплив в силу таких причин. *По-перше*, значні викривлення структури економіки потребують значного часу на їх виправлення, а значить, приводять до більш глибокого спаду випуску. *По-друге*, забезпеченість ресурсами, хоча й сприяє залученню інвестицій, але стримує реформи, оскільки є свого роду "ресурсною подушкою" для бюджету та підприємств. *По-третє*, близькість до Західної Європи і відносно нетривалий період соціалізму позитивно вплинули на здатність економічних агентів адаптуватись до нових інститутів й зробили політику більш ліберальною;

- найбільше зростання добробуту досягнуто тими країнами з перехідною економікою, де проводилась політика, спрямована на вступ до Європейського Союзу [20].

Не менш активно сьогодні апарат ВФ використовується у дослідженнях, де автори намагаються **статистично оцінити роль різних факторів у зростанні продуктивності праці**. Появу ж таких робіт на початку 70-х рр. можна пояснити широкою дискусією навколо понять *економічний розвиток* та *економічне зростання*, що включала у розгляд, окрім традиційних факторів зростання, також ще й соціальну, інституціональну та політичну структуру країн. Пошук основних факторів розвитку виробництва, що лежать в основі відмінностей між країнами, за допомогою ВФ привів до необхідності дослідження чинників, що формують показник ефективності робочої сили. У переважній кількості робіт було доведено, що ключова роль належить соціаль-



ній інфраструктурі, а також значущими є географічне положення країни, її близькість до країн Західної Європи.

Як приклад застосування ВФ у такого роду дослідженнях, можна навести результати роботи Р.Холла та Ч.Джонса [21], що намагались статистично оцінити роль соціальних і політичних факторів у зростанні продуктивності праці. Дослідження проводилось у два етапи: спершу міжкраїнові відмінності у випуску на одного зайнятого було розкладено на дві складові – капітал та ефективність праці; а потім – зроблено оцінку впливу соціально-політичної інфраструктури<sup>5</sup> на показник ефективності. У табл. 5 наведено вибіркові результати оцінок продуктивності факторів для ряду країн, що для зручності порівняння перераховані у співвідношенні із відповідними значеннями по США: оцінка вкладу капіталомісткості ( $K/Y$ ), інтелектуального капіталу на одного зайнятого ( $H/Y$ ), ефективності ( $A$ ) у показник продуктивності праці ( $Y/L$ ).

Таблиця 5

**Продуктивність факторів**  
(показники США 1988 р. = 1)

	$Y/L$	$(K/Y)^{\alpha/(1-\alpha)}$	$H/L$	$A$
США	1,000	1,000	1,000	1,000
Канада	0,941	1,002	0,908	1,034
Італія	0,834	1,063	0,650	1,207
ФРН	0,818	1,118	0,802	0,912
Франція	0,818	1,091	0,666	1,126
Велика Британія	0,734	0,891	0,808	1,011
Гонконг	0,608	0,741	0,735	1,115
Сінгапур	0,606	1,031	0,545	1,078
Японія	0,587	1,119	0,797	0,658
Мексика	0,433	0,868	0,538	0,926
Аргентина	0,418	0,953	0,676	0,648
СРСР	0,417	1,231	0,724	0,468
Індія	0,086	0,709	0,454	0,267
Китай	0,060	0,891	0,632	0,106
Кенія	0,056	0,747	0,457	0,165
Заїр	0,033	0,499	0,408	0,160

Джерело: Cobb Charles W., Douglas Paul H. A theory of production (1928). – American Economic Review 18 (1, suppl.): 1309–165.

Російські дослідники Ю. Лукашин та Л.Рахліна, які аналізували роботу Р.Холла та Ч.Джонса, підтверджують коректність їх результатів стосовно СРСР, що мав самий високий показник капіталомісткості виробництва, відносно високий рівень освіти, але зовсім скромний показник ефективності. Для слабо розвинених країн (Індії, Китаю, Кенії, Заїру) низький рівень ефективності був у 1988 р. основною причиною низького значення показника випуску на одного зайнятого. Так, наприклад, в Китаї він становив тільки 6%

<sup>5</sup> Для розрахунків було розраховано середній індекс із ряду показників(захист від посягань на особистість, рівень законності та правопорядку, якість державного апарату управління, корупція, надійність державних гарантій відносно прав власності й контрактів), а також ураховувалась інформація щодо відкритості країни міжнародним зв'язкам та торгівлі (через показники митних ставок і квот) та показники, що характеризують віддаленість від екватора, відсоток населення, що володіє англійською або мовою іншої західноєвропейської країни, характер основної релігії.

рівня США і основною причиною, експерти назвали низьку ефективність використання робочої сили, що, у свою чергу значною мірою визначається рівнем соціально-політичної інфраструктури [див. 5]. Значний ривок Китаю за останнє десятиліття у сфері підвищення рівня інфраструктури та проведення широкого комплексу реформ лише підтверджує правильність наведеного висновку.

У контексті підтвердження важливості комплексності трансформації економіки, зокрема, для забезпечення успіху у досягненні стабільних темпів зростання у країнах з перехідною економікою, цікавими є результати дослідження білоруських вчених і, зокрема, А.Чубрика, який підкреслив важливість урахування специфіки інституціонального середовища та швидкості його змін для перспектив розвитку країн з перехідною економікою [див. 20]. Крім того, згадана робота є чудовою нагодою назвати ще одну *важливу особливість використання апарату ВФ на сучасному етапі – використання при їх побудові як змінних агрегованих індексів*. Слід відмітити, що перехід від абсолютних значень незалежних змінних до їх відносних показників у практиці побудови ВФ відбувся вже давно, але з появою індексів, що розраховуються міжнародними організаціями і які дають можливість описати різні латентні агреговані характеристики досліджуваних процесів та явищ, їх використання стало активним.

А.Чубрик, наприклад, використав такі індекси ЄБРР, Freedom House та Heritage Foundation: **EBRD**, що характеризує досягнутий прогрес у реформуванні економіки; **FHD** – рівень розвитку демократії; **FHEL** – ступінь лібералізації економіки; **FHROL** – стан правової сфери; **HF** – рівень економічної свободи. За його розрахунками коефіцієнти кореляції між індексами, що були взяті за період 1991–2002 рр. для країн з перехідною економікою<sup>6</sup> були високими – від 0,85 до 0,96 по абсолютному значенню. Це свідчить про те, що трансформація від планової економіки до ринкової супроводжувалась демократизацією політичної сфери і встановленням верховенства закону. В табл. 6 приведено результати аналізу щільності зв'язку між різними компонентами індексу реформ, які дають інформацію про те, які реформи відбувались в комплексі. Високий рівень кореляції між двома компонентами індексу свідчить про те, що відповідні реформи проводились з однаковою інтенсивністю і одночасно. Низький рівень значення коефіцієнта кореляції говорить про те, що проведення однієї з реформ не досить для успіху іншої. Однак в цілому, як зазначає А.Чубрик, є очевидним, що комплексність трансформації економіки сприяла успіху окремих реформ [див. 20].

Слід відмітити, що широке розмаїття аналітичних та прогностичних можливостей, що дає використання апарату ВФ, пов'язане з активною розробкою самого методу виробничої функції, яку на сьогоднішній день не можна вважати завершеною, оскільки ведуться дослідження по узагальненню, уточненню, пошуку нових можливостей. Перспективними напрямками є введення елементів стохастичності з використанням теорії ймовірностей та поєднання ко-

<sup>6</sup> У розгляд включені наступні країни: Албанія, Азербайджан, Білорусь, Болгарія, Вірменія, Хорватія, Чехія, Естонія, Грузія, Угорщина, Казахстан, Киргизстан, Латвія, Литва, Македонія, Молдова, Польща, Румунія, Росія, словаків, Словенія, Таджикистан, Туркменістан, Україна, Узбекистан.



реляційного (кількісного) аналізу з дисперсійним (якісним) для більш повного врахування факторів [див. 3].

Таблиця 6

## Кореляція між компонентами індексу реформ ЄБРР

	BRIRL	CP	GER	IR	LSP	PL	SMNBFI	SSP	TFES
BRIRL	1,00								
CP	0,56	1,00							
GER	0,88	0,66	1,00						
IR	0,80	0,62	0,75	1,00					
LSP	0,76	0,60	0,79	0,73	1,00				
PL	0,58	0,28	0,52	0,44	0,52	1,00			
SMNBFI	0,72	0,74	0,74	0,74	0,65	0,32	1,00		
SSP	0,79	0,52	0,78	0,67	0,79	0,58	0,61	1,00	
TFES	0,82	0,43	0,76	0,66	0,72	0,70	0,54	0,82	1,00

П р и м і т к а : BRIRL – банківська реформа і лібералізація відсоткова ставок; CP – політика сприяння конкуренції; GER – управління й реструктуризація підприємств; IR – реформування інфраструктури; LSP – приватизація великих підприємств; PL – лібералізація цін; SMNBFI – ринки цінних паперів й небанківські фінансові інститути; SSP – мала приватизація; TFES – зовнішня торгова та валютна система.

Джерело: Чубрик А. Экономическая теория и политическая экономия экономического роста в Беларуси. [Электронный ресурс] // www.research.by

Узагальнюючи особливості використання апарату ВФ для макроекономічного аналізу, можна сказати, що на сучасному етапі емпіричні дослідження зосереджені у напрямках пояснення факторів зростання в окремо взятій країні (групі країн) та аналізі відмінностей у темпах зростання й рівнях доходу між різними країнами. Практика аналізу української економіки на основі ВФ є ще не багатою, а отже, вивчення досвіду інших країн стане в пригоді, оскільки розширює горизонти вітчизняних досліджень.

## Література

1. Винн Р., Холден Л. Введение в прикладной эконометрический анализ. – М.: Финансы и статистика, 1981. – С. 64–94.
2. Загородній А.Г., Вознюк Г.Л., Смовженко Т.С. Фінансовий словник. – 4-те вид., випр. та доп. – К.: Т-во "Знання", КОО; Л.: Вид-во Львів. банк. Ін-ту НБУ. – С.479.
3. Математика и кибернетика в экономике. Словарь-справочник. –2-е изд., перераб. и доп. –М: Экономика, 1975. –С.453–458.
4. Cobb Charles W., Douglas Paul H. A theory of production (1928). – American Economic Review 18 (1, suppl.): 1309–165.
5. Лукашин Ю., Рахлина Л. Производственные функции в анализе мировой экономики // МЭиМО. – 2004. – № 1. – С. 17–27.
6. Weitzman M.L. Soviet Postwar Economic Growth and Capital-Labor Substitution. The American Economic Review, 1970. – V. 60. – № 466. – P. 676–692.
7. Антохонова И.В. Методы прогнозирования социально-экономических процессов. – Улан-Удэ: Изд-во ВСГТУ, 2004. – с.171.
8. Oliner D., Sichel D. The Resurgence of growth in the Late 1990s: Is Information technology the Story? // The Journal of Economic Perspectives. – 2000. – V. 14. – P. 3–22.

9. *Mankiv N., Romer D., Weil N.* A Contribution to the Empirics of Economic growth // *Quarterly Journal of economics.* – May 1992. – V.107. – P. 407–438.
10. *Куликова Н.В.* Модификация производственной функции: теоретические подходы [Электронный ресурс] // [www.anrb.ru](http://www.anrb.ru).
11. *Чубрик А.* Отдача от масштаба производственной функции и общефакторная производительность: пример Польши и Беларуси // *Эковест.* – 2002. – № 2. – С. 252–275.
12. *Дагаев А.* Новые модели экономического роста с эндогенным техническим прогрессом // *МЭиМО.* – 2001. – № 6. – С. 40–51.
13. *Балацкий Е.В.* Анализ влияния и налоговой нагрузки на экономический рост с помощью производственно-институциональных функций // *Проблемы прогнозирования.* – 2003. – №2. – С.88–105.
14. Тези доповідей Всеукраїнської науково-практичної конференції "Сучасні моделі і методи прогнозування соціально-економічних процесів" (ПСЄП-2006). 13–14 квітня 2006 р. – К.: Київ. нац. ун-т ім. Тараса Шевченка, 2006. – 216 с.
15. *Дунаев Б.Б.* Модель расчета валового внутреннего продукта как функции труда и капитала // *Кибернетика и системный анализ.* – 2004. – № 1. – С. 104–115.
16. *Шумська С.С.* Особливості побудови та використання інтегральних показників у міжнародній та українській практиці // *Економіст.* – 2006. – № 11 (241). – С. 74–77.
17. *Sala-i-Martin, X.* (1997) I Just Run Two Million Regressions. *American Economic Review*, 82, 2, 178–183.
18. *Havrylyshyn, O., Izvorski, I., and van Rooden, R.* (1998) Recovery and Growth During the transition Economy, *IMF Working Paper*, WP/98/141.
19. *Havrylyshyn, O., Izvorski, I., and van Rooden, R.* (2000) Institutions Matter In Transition, But So Do Policies, *IMF Working Paper*, WP/00/70.
20. *Чубрик А.* Экономическая теория и политическая экономия экономического роста в Беларуси. [Электронный ресурс] // [www.research.by](http://www.research.by).
21. *Hall R., Jones Ch.* Why Do some Countries Produce So Much Output per Worker than Others? // *Quarterly Journal of Economics.* – 1999. – V. CXIV. – P. 83–116.